

## 総合演習 30

別解：数学Ⅲの無限等比級数で解く

A が優勝するのは、 $\xrightarrow{\frac{2}{3}} B \xrightarrow{\frac{1}{3}} A$  を 0 回以上繰り返した後、 $\xrightarrow{\frac{1}{3}} A$  となる場合である。

よって、 $\xrightarrow{\frac{2}{3}} B \xrightarrow{\frac{1}{3}} A$  を  $n-1$  回 ( $n=1, 2, \dots$ ) 繰り返した後 A が優勝する確率を  $p_n$

とすると、 $p_n = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}$

ゆえに、求める確率は、 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{9}} = \frac{3}{7}$

## 補足

$p = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot p$  の説明

A が優勝するときの勝負回数の範囲は  $1, 3, 5, 7, \dots, 2m-1, \dots$  と無限大におよぶから、それぞれの回数で A が優勝する確率を  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, \dots$  とすると、

A が優勝する確率  $p = q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} q_n$

$A \xrightarrow{\frac{2}{3}} B \xrightarrow{\frac{1}{3}} A$  となった後、つまり最初の状態に戻った後でも、

勝負は A が優勝するまで延々と続くから、その後 A が優勝する確率も  $p$  である。

よって、

A が優勝する確率  $p =$  いきなり 2 連勝する確率 + 最初の状態に戻ってから優勝する確率

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot p$$